

Radiation

Jintai Lin

致谢：本课件中部分资料来自李成才老师
(特别是关于辐射的部分)。



Outline

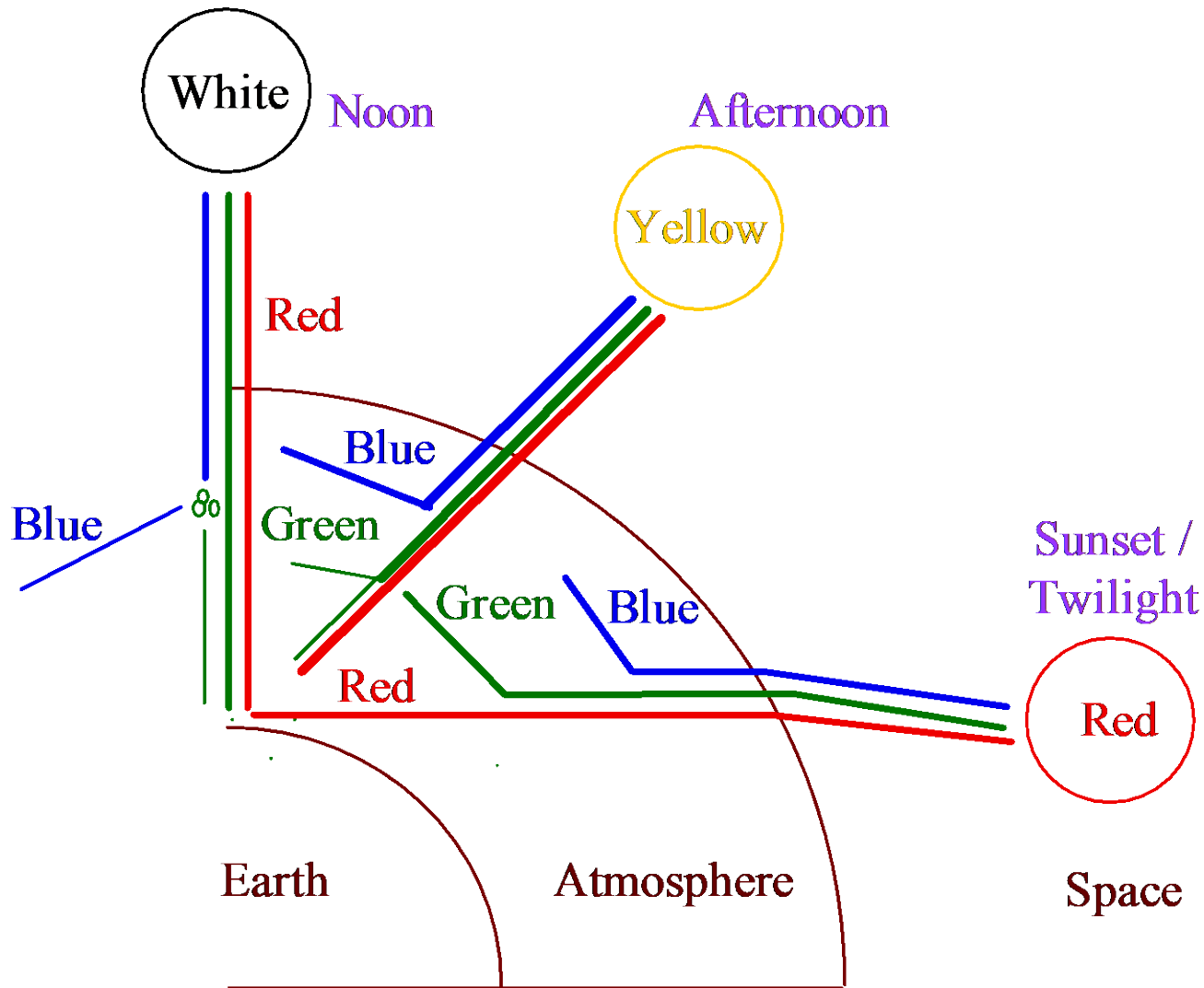
- Introduction
- Concepts
- Absorption
- **Scattering**
- Radiative transfer
- Radiative equilibrium temperature
- Radiative heating and cooling

Scattering in the Atmosphere

Taken after sunrise



Change of Sun's Color During the Daytime



Moonrise versus Earthrise



Moonrise with blue scattering caused by earth's atmosphere, photographed from the orbit of Space Shuttle Discovery in 1999.



Earthrise with black sky since there is no atmosphere, photographed from the orbit of Apollo 11 in 1969.

红月亮、蓝月亮



<https://zhuatlan.zhihu.com/p/33472940>

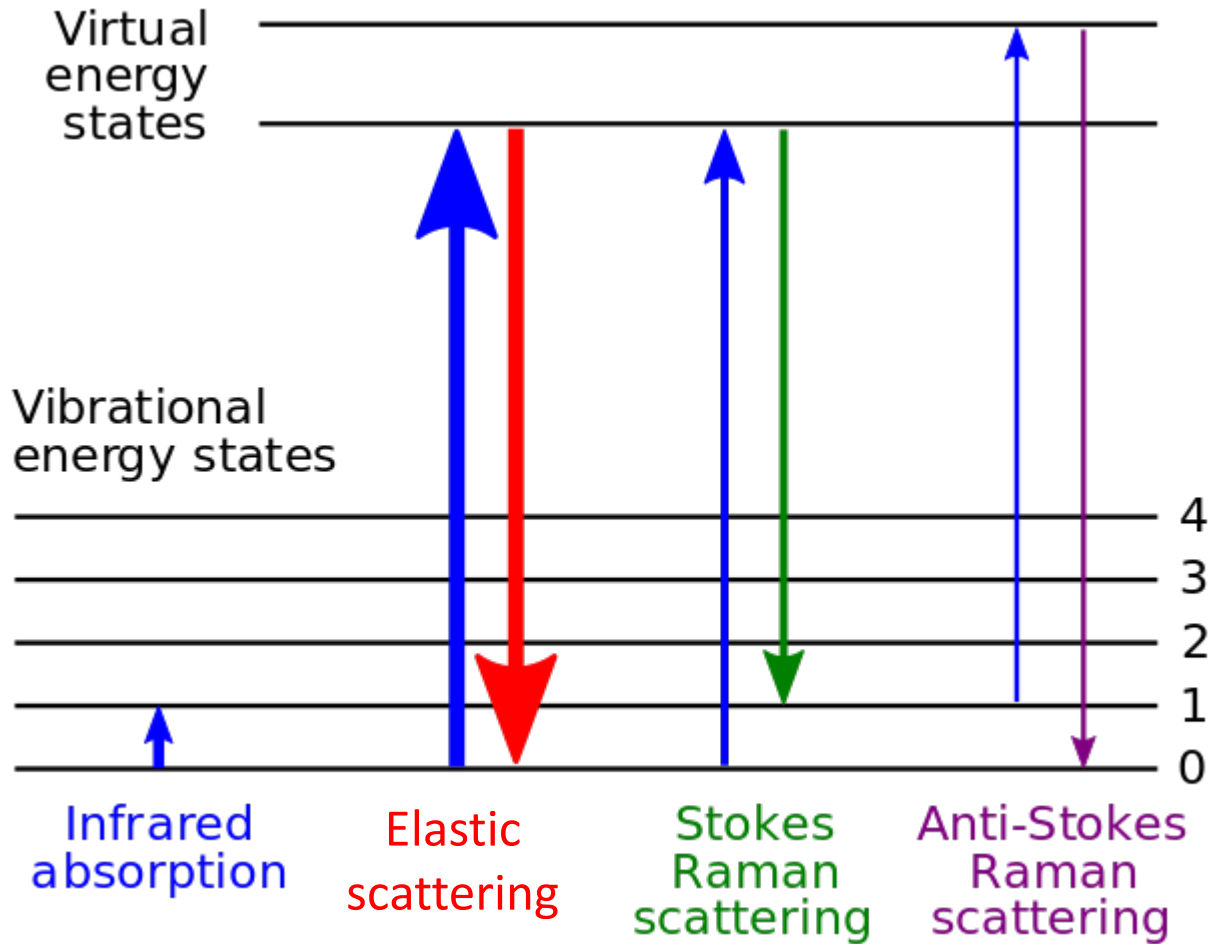


https://m.sohu.com/n/464038572/?_f=m-article_ch

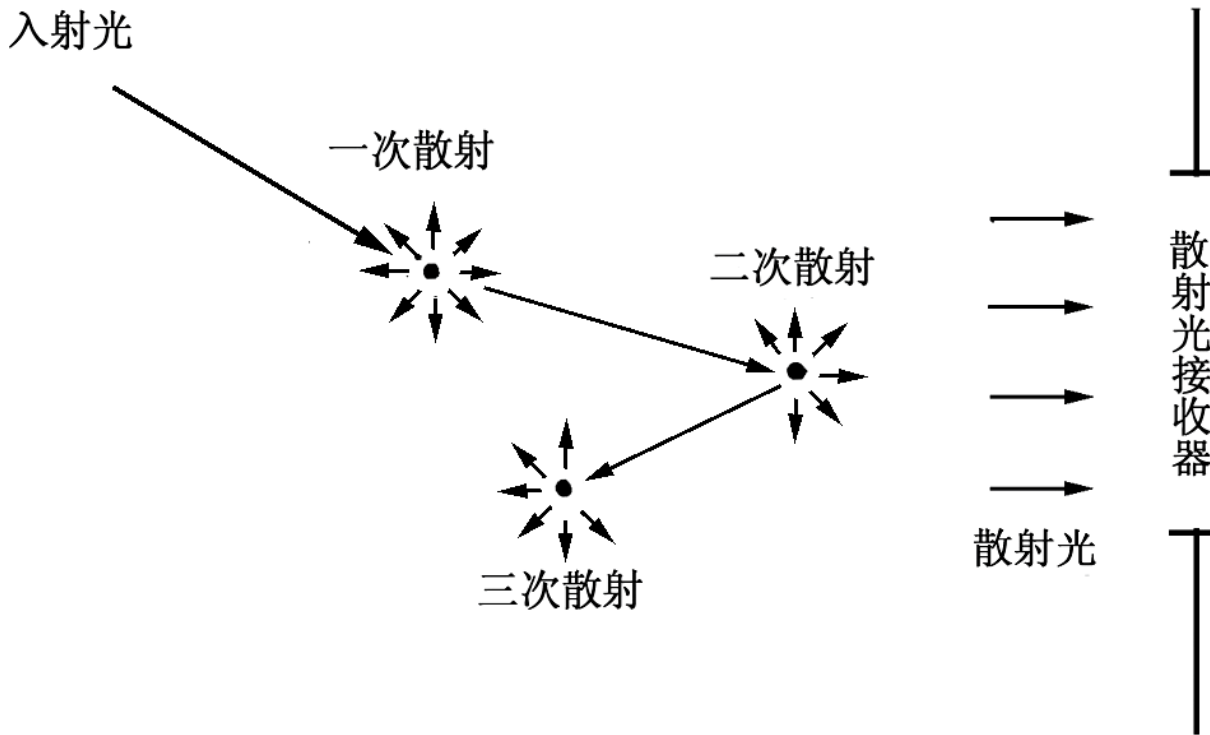
散射

- 散射是电磁波激发（引起散射的）物质内部振动向外发射子波并且不能完全干涉抵消掉的结果。
- 散射将波传播的方向改变，把一部分能量散射到四面八方（动量变化？光镊原理？）。
- 大气中，空气分子、气溶胶粒子、水滴、冰晶、湍流气块等会造成散射。
- 如果散射波的波长（频率）不变，这种散射称为**弹性散射**，其不改变散射体（分子，原子或颗粒物）本身的能级。
- 部分粒子（约占1/1000）的散射过程也可能最终改变该粒子的能级，因此从它们散射辐射的波长（频率）有变化，可以增加或减少，称为**非弹性散射**（Raman拉曼散射）。

散射



一次散射、多次散射



能见度？

散射过程的基本图象

对单个散射粒子

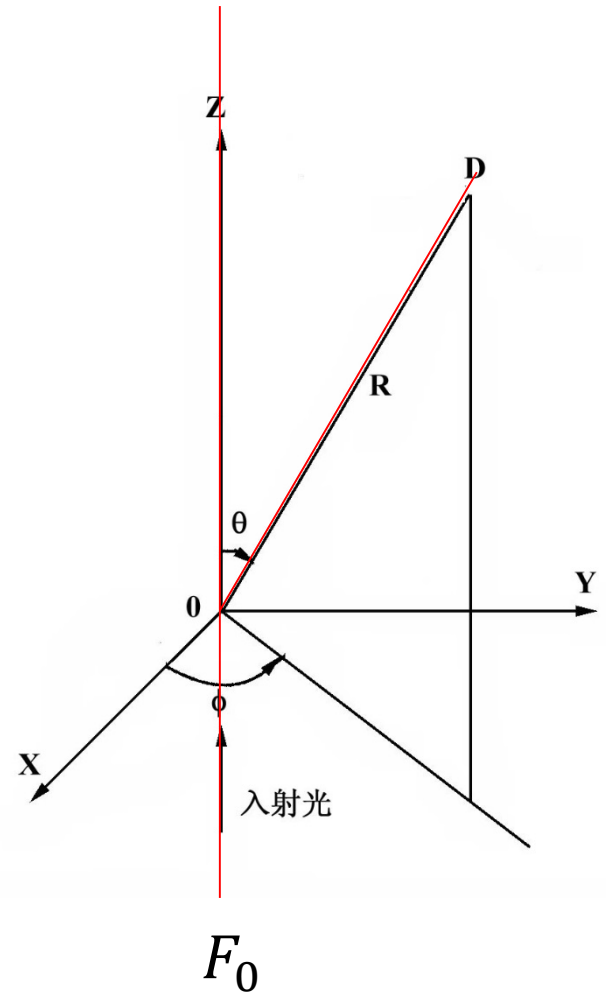
$$F_s(R, \theta, \phi) = \frac{F_0}{R^2} \sigma(\theta, \phi)$$

$\sigma(\theta, \phi)$ 散射函数

对小体积元 dv

$$dF_s(R, \theta, \phi) = \frac{F_0}{R^2} \beta(\theta, \phi) dv$$

$\beta(\theta, \phi)$ 散射方向性函数



散射的基本参数

散射函数 $\sigma(\theta, \phi)$

散射方向性函数 $\beta(\theta, \phi)$

散射截面 σ_{sc}

体积散射系数 k_{sc}

吸收截面 σ_{ab}

体积吸收系数 k_{ab}

消光截面 σ_{ex}

体积消光系数 k_{ex}

单次散射反照率 ω_0 (Single Scattering Albedo)

相函数 $P(\theta, \phi)$ (Phase function)

不对称度因子 g (asymmetric factor)

散射的基本参数

当入射光能量为一个单位时，一个粒子向四面八方总散射掉的能量应当是散射函数的积分

散射截面 $\sigma_{sc} = \int_{4\pi} \sigma(\theta, \phi) \cdot d\Omega$

定义：吸收截面 σ_{ab}

因此，消光截面 $\sigma_{ex} = \sigma_{sc} + \sigma_{ab}$

Absorption, scattering & extinction efficiencies 效率

$$Q_{sc} = \frac{\sigma_{sc}}{\pi r^2} \quad Q_{ab} = \frac{\sigma_{ab}}{\pi r^2} \quad Q_{ex} = \frac{\sigma_{ex}}{\pi r^2}$$

散射的基本参数

对于单个散射粒子：
单次散射反照率

$$\omega_0 = \sigma_{sc} / \sigma_{ex} = \sigma_{sc} / (\sigma_{sc} + \sigma_{ab})$$

相函数

$$P(\theta) = P(\theta, \phi) = \frac{\sigma(\theta, \phi)}{\frac{\sigma_{sc}}{4\pi}} = \frac{4\pi}{\sigma_{sc}} \sigma(\theta, \phi)$$

$$\int_{4\pi} P(\theta, \phi) \cdot d\Omega = 4\pi$$

散射的基本参数

Asymmetric Factor 不对称度因子

$$g = \frac{\int \cos \theta \cdot \sigma(\theta, \phi) \cdot d\Omega}{\int \sigma(\theta, \phi) \cdot d\Omega}$$
$$= \frac{1}{4\pi} \int \cos \theta \cdot P(\theta, \phi) \cdot d\Omega$$

$g > 0?$

$g = 0?$

$g < 0?$

散射的基本参数

对体积元：

$$dF_s(R, \theta, \phi) = \frac{F_0}{R^2} \beta(\theta, \phi) dv$$

体积散射系数
(单位体积的
散射截面积)

$$k_{sc} = \int \beta(\theta, \phi) \cdot d\Omega$$

$$k_{ab}$$

$$k_{ex} = k_{sc} + k_{ab}$$

散射的基本参数

对体积元：

$$\omega_0 = k_{sc}/k_{ex} = k_{sc}/(k_{sc}+k_{ab})$$

$$P(\Theta) = P(\theta, \phi) = \frac{4\pi}{k_{sc}} \beta(\theta, \phi)$$

$$g = \frac{\int \cos \theta \cdot \beta(\theta, \phi) \cdot d\Omega}{\int \beta(\theta, \phi) \cdot d\Omega}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int \cos \theta \cdot P(\theta, \phi) \cdot d\Omega$$

独立散射原理

- 当散射粒子间的距离比3倍直径还大时，各个粒子的散射可以认为是独立的，即总的散射效果是各个粒子散射的和。
- 若气溶胶 $M=100\mu\text{g}/\text{m}^3$, $\rho=10^3\text{kg}/\text{m}^3$, $r=500\text{nm}$
- 则 $\# = 3e7$, $D \sim 3000\mu\text{m} \gg d = 2r$
- 我们在大气中碰到的情况一般都满足独立散射的条件，因此单位体积中粒子的散射是该体积中所有粒子散射之和。

体积元的散射、吸收和消光

若该体积元中气体分子数浓度为 N^m ，气溶胶粒子数浓度谱为 $n(r)dr$ ：

$$\beta(\Theta) = \sigma^m(\Theta) * N^m + \int_0^{\infty} \sigma^a(r, \Theta) n(r) dr$$

$$k_{sc} = \sigma_{sc}^m * N^m + \int_0^{\infty} \sigma_{sc}^a(r) n(r) dr$$

$$k_{ab} = \sigma_{ab}^m * N^m + \int_0^{\infty} \sigma_{ab}^a(r) n(r) dr$$

$$k_{ex} = \sigma_{ex}^m * N^m + \int_0^{\infty} \sigma_{ex}^a(r) n(r) dr$$

其中带上标 m 为气体分子，带上标 a 为气溶胶

散射的决定性参数

- 散射和散射角度、波长、散射粒子的大小、形状、折射率有关
- 为简单起见，常讨论**均匀球状粒子**的散射，对应参数为：

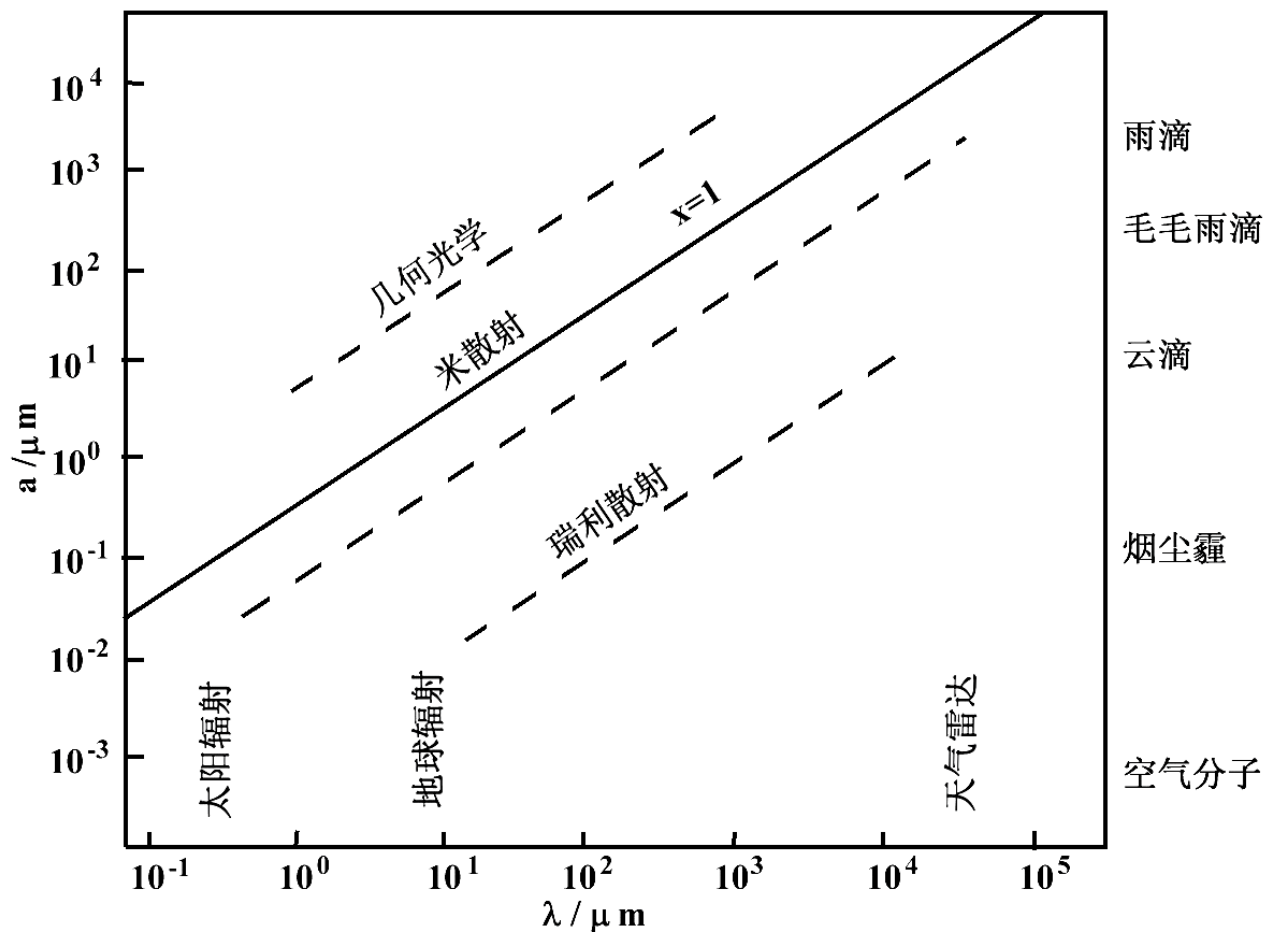
$$\left. \begin{array}{l} \text{粒子半径 } r \\ \text{波长 } \lambda \end{array} \right\} \text{尺度数 } x = 2\pi r / \lambda$$

$$\text{粒子折射率 } m = m_r - i m_i$$

散射角度

- 散射特性与尺度数和折射率的关系：
 - 当 $x \ll 1$ 瑞利 (Rayleigh) 散射
 - 当 $0.1 < x < 50$ 米 (Mie) 散射
 - 当 $x > 50$ 几何光学
 - 短波在小粒子上的散射和长波在大粒子上的散射特征可相同

散射区域



短波在小粒子上的散射和长波在大粒子上的散射特征可相同

散射理论

- 对于由很多分子组成的散射粒子，在外电场的激发下，分子会通过内部的偶极子向外发射着子波。
- 因为散射粒子的尺度可与波长相比拟，入射波的位相在粒子中是不均匀的，造成了各子波在空间和时间上的位相差。
- 当子波迭加形成散射波时，由于位相差将造成子波的干涉。
- 这种干涉取决于尺度数（入射光的波长、粒子的大小）、复折射率、粒子形状及散射角度。
- 当粒子增大时，干涉作用增大，使散射过程变得极为复杂。
- 1908年G.Mie给出了**均匀球状粒子**散射问题的精确解，也就是通常所说的米散射（Mie散射）理论。

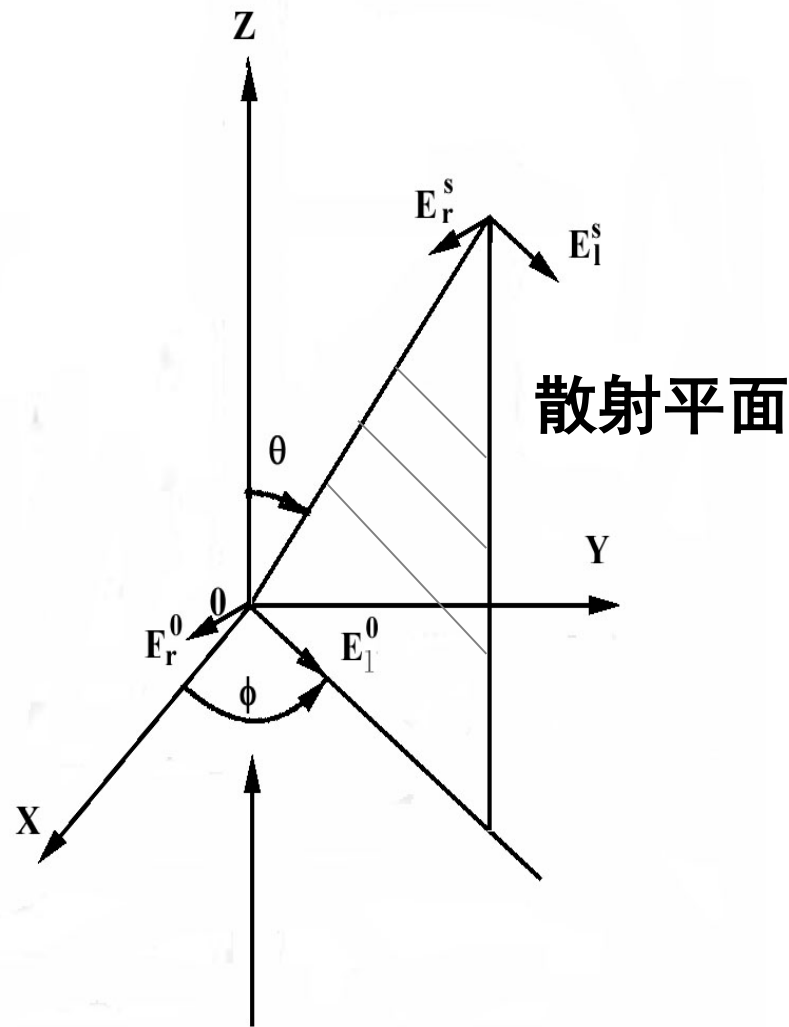
米散射与米散射理论的区别？

Mie理论：求解均匀球状粒子对电磁波的散射和吸收

在真空中，一束单色平面线偏振波沿z轴方向传播，其电场矢量沿x轴方向振动

$$E = E^0 e^{-i(kz - \omega t)}$$

E^0 为入射波振幅



Mie 散射理论求解

- 在坐标原点 O 放置一个半径为 r 的均匀球状粒子，要计算其在 (θ, ϕ) 方向的散射光。
- 取包含入射光和散射光方向的平面为散射平面，并将入射光和散射光都分解为两组互相垂直的偏振分量 $E_i^0, E_r^0, E_i^s, E_r^s$ 。
- 其中 E_i^0, E_i^s 在散射平面内， E_r^0, E_r^s 和与散射平面垂直。
- 在球的内部形成透射场，而在粒子外部将形成一个散射场。
- 散射场和透射场在粒子表面必须满足一定的边界条件。

Mie 散射理论求解：麦克斯韦方程组

变化的磁场激发电场
法拉第电磁感应定理

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

电流与变化电场激发磁场
安培环路定理+

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

电场性质
高斯定理

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

磁场性质
磁联通连续性定理

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

对于线性各向同性介质

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$\rho = 0$$

$$\epsilon \mu = 1/v^2$$

E : 电场强度。 D : 电位移强度。 H : 磁场强度。 B : 磁感应强度。 J : 传导电流密度。
 ρ : 自由电荷密度。 ϵ : 介电系数。 μ : 磁导率 $\approx \mu_0$ 真空磁导率, σ : 电导率。

Mie 散射理论求解

- 设电磁场为定常的简谐波，即电磁场振幅在空间的分布不随时间变化。

$$\vec{E} = \vec{E}_\theta(x, y, z) e^{i\omega t}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_\theta(x, y, z) e^{i\omega t}$$

- 可以得到波动方程（Helmholtz 方程）

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0$$

忽略下标 θ

其中

$$k^2 = \mu \omega^2 \left(\varepsilon - \frac{i\sigma}{\omega} \right)$$

Mie 散射理论求解

- 球内 ($R < r$): $k^2 = \mu \omega^2 (\varepsilon - i \sigma / \omega)$
- 球外 ($R > r$): $k^2 = \omega^2 / c^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$ [$\sigma_0 = 0$]
- 在 $R = r$ 处, 满足边界条件

无自由电荷

电场强度的切向分量连续

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \Sigma = 0$$

$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{K} = 0$$

磁感应强度的法向分量连续

无传导电流

Mie 散射理论求解思路

1. 组合二个矢量解 \vec{M}_n 和 \vec{N}_n
2. 用 \vec{M}_n 和 \vec{N}_n 的线性无关组合构造通解

$$\vec{E} = - \sum_n \left(a_n \vec{M}_n + b_n \vec{N}_n \right)$$

$$\vec{H} = -ik \sum_n \left(a_n \vec{N}_n + b_n \vec{M}_n \right)$$

3. 由边界条件决定系数 a_n, b_n

Mie 散射理论求解：从标量特解到矢量特解

可以通过求解标量方程

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$$

的特解 ψ_n ，再组合为矢量方程的特解

$$\vec{M}_n = \nabla \times (\psi_n \vec{r})$$

$$\vec{N}_n = \frac{1}{k} (\nabla \times \vec{M}_n)$$

球坐标系
方向矢量

波数

球坐标系中波动方程的解

➤ 波动方程

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$$

➤ 在球坐标中有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \\ & + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k^2 \psi = 0 \end{aligned}$$

球坐标系中波动方程的解：寻找特解

➤ 用分离变量法

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\phi)$$

➤ 分别得到

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi = 0$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + [k^2 r^2 - n(n+1)] R = 0$$

参数 n 为正整数，来自分离变量法

参数 $m = -n, -n+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, n-1, n$ ，来自分离变量法⁰

球坐标系中波动方程的解：寻找特解

➤ 这三个常微分方程的特解分别为

$\cos m\phi$ $\sin m\phi$ 三角函数

$P_n^m(\cos\theta)$ 连带勒让德多项式

$J_n(rk)$ & $Y_n(rk)$ $Z_n(rk)$

第一类、第二类球贝塞尔函数 球汉克尔函数

✓ 当 $r \rightarrow 0$ ， J_n 有限，可作为球内解； Y_n 发散，不能用

✓ 当 $r \rightarrow \infty$ ，由 J_n 和 Y_n 线性组合而得的 Z_n 在 $r \rightarrow \infty$ 时趋于0，可作为球外的解

球坐标系中波动方程的解：寻找特解

ψ 有奇、偶二组线性无关的特解

$$\psi_{emn} = \cos m\phi P_n^m(\cos\theta) Z_n(kr)$$

$$\psi_{omn} = \sin m\phi P_n^m(\cos\theta) Z_n(kr)$$

相应可以组合出奇、偶二组矢量解

$$\begin{cases} \vec{M}_{emn} = \nabla \times (\vec{r} \psi_{emn}) \\ \vec{N}_{emn} = \frac{1}{k} \nabla \times \vec{M}_{emn} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{M}_{omn} = \nabla \times (\vec{r} \psi_{omn}) \\ \vec{N}_{omn} = \frac{1}{k} \nabla \times \vec{M}_{omn} \end{cases}$$

米散射求解（球外）

利用Maxwell方程组及其边界条件，得到关于散射电场的表达式

$$\begin{bmatrix} E_l^s \\ E_r^s \end{bmatrix} = \frac{e^{-ikr + ikz}}{ikr} \begin{bmatrix} S_2(\theta) & 0 \\ 0 & S_1(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_l^0 \\ E_r^0 \end{bmatrix}$$

米散射求解（球外）

这里 $S_1(\theta)$ 和 $S_2(\theta)$ 为两个复振幅函数：

$$S_1(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \{a_n \pi_n(\cos \theta) + b_n \tau_n(\cos \theta)\}$$

$$S_2(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \{b_n \pi_n(\cos \theta) + a_n \tau_n(\cos \theta)\}$$

$$\pi_n(\cos \theta) = \frac{1}{\sin \theta} P_n^1(\cos \theta),$$
$$\tau_n(\cos \theta) = \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos \theta).$$

函数 π_n 和 τ_n 仅与 n 和角度 θ 有关。无穷级数表示在入射电磁波作用下，散射粒子内电荷随入射波同步作强迫振荡产生的多阶散射电磁波的和。

米散射求解（球外）

参数 a_n 和 b_n 为两个复函数，分别反映电场振荡和磁场振荡对散射的影响，由粒子的复折射率 m 、尺度数 x 和参数 $\rho=mx$ 决定

$$a_n = \frac{m \psi_n(m x) \psi'_n(x) - \psi(x) \psi'_n(m x)}{m \psi_n(m x) \xi'_n(x) - m \xi_n(x) \psi'_n(m x)}$$

$$b_n = \frac{\psi_n(m x) \psi'_n(x) - m \psi_n(x) \psi'_n(m x)}{\psi_n(m x) \xi'_n(x) - m \xi_n(x) \psi'_n(m x)}$$

$\Psi_n(\rho) = \rho j_n(\rho)$; $\xi_n(\rho) = \rho h_n^{(1)}(\rho)$ 为Riccati-Bessel函数

散射光

I 和 r 两个分量的散射光强度分别与散射电场振幅的平方成正比:

$$\text{平行分量} \quad I_1^s = \frac{I_1^0}{k^2 r^2} |S_2(\theta)|^2 = \frac{I_1^0}{k^2 r^2} i_2$$

$$\text{垂直分量} \quad I_r^s = \frac{I_r^0}{k^2 r^2} |S_1(\theta)|^2 = \frac{I_r^0}{k^2 r^2} i_1$$

$$\text{散射光总强度:} \quad I_s = I_1^s + I_r^s = (k^2 r^2)^{-1} (I_1^0 i_2 + I_r^0 i_1)$$

$$\text{当入射光为自然光时:} \quad I_1^0 = I_r^0 = \frac{1}{2} I_0$$
$$I_s = \frac{I_0}{2k^2 r^2} (i_2 + i_1)$$

$$\text{对应的散射函数:} \quad \sigma(\theta) = \frac{1}{2k^2} (i_2 + i_1)$$

瑞利散射

Intensity:

$$I = \frac{I_0}{r^2} \alpha^2 k^4 \frac{1 + \cos^2(\theta)}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} i_1 = \alpha^2 k^6 & \text{垂直} \\ i_2 = \alpha^2 k^6 \cos^2(\theta) & \text{平行} \end{array} \right.$$

$$\alpha = \frac{3}{4\pi N} \left(\frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} \right)$$

Polarizability 极化率

$k = 2\pi/\lambda = \omega/c$, $r =$ 距离, $N =$ 数浓度, $m =$ 复折射率

Fir air, $m \approx 1.0002793$

Degree of linear polarization

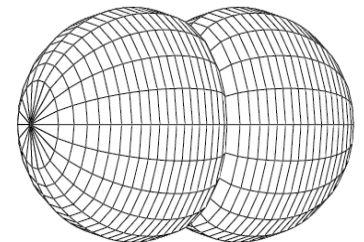
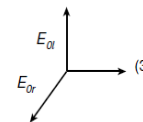
线偏振度:

$$p(\theta) = p(\theta) = \frac{i_1 - i_2}{i_1 + i_2} = \frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta) + 1}$$

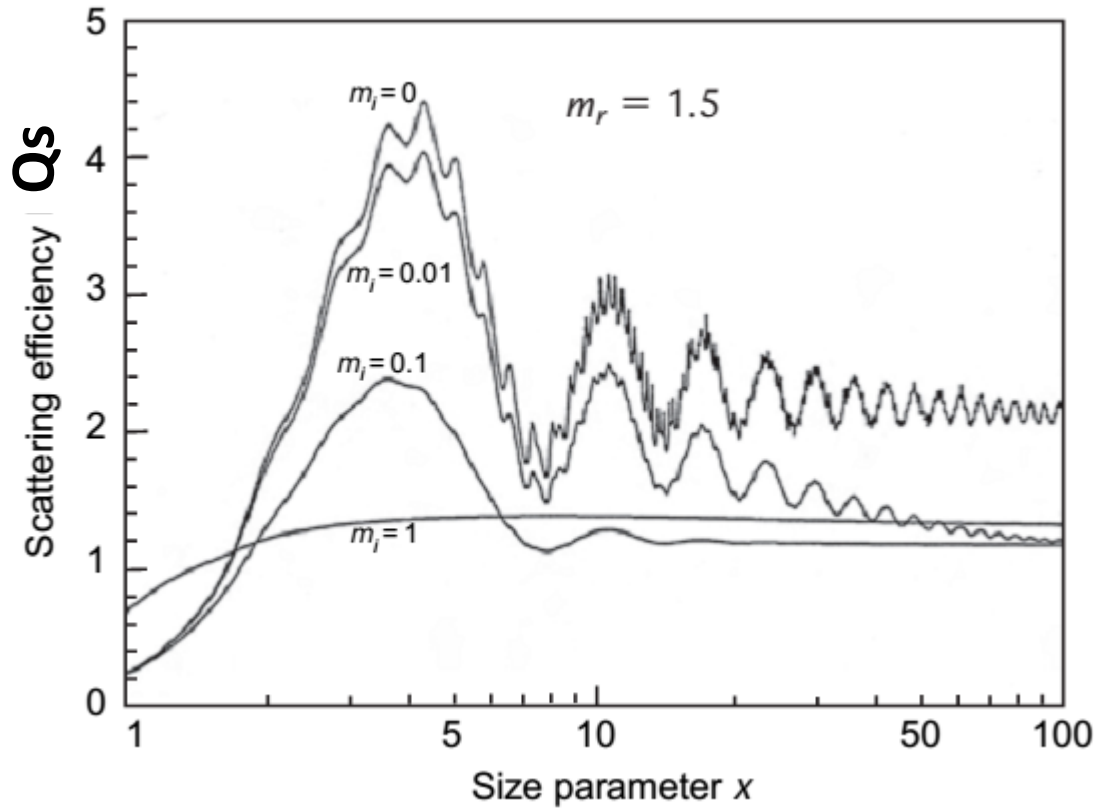
Liou K.N., An introduction to atmospheric radiation

Phase function:

$$P(\theta) = \frac{3}{4} [1 + \cos^2(\theta)]$$



米散射的特性



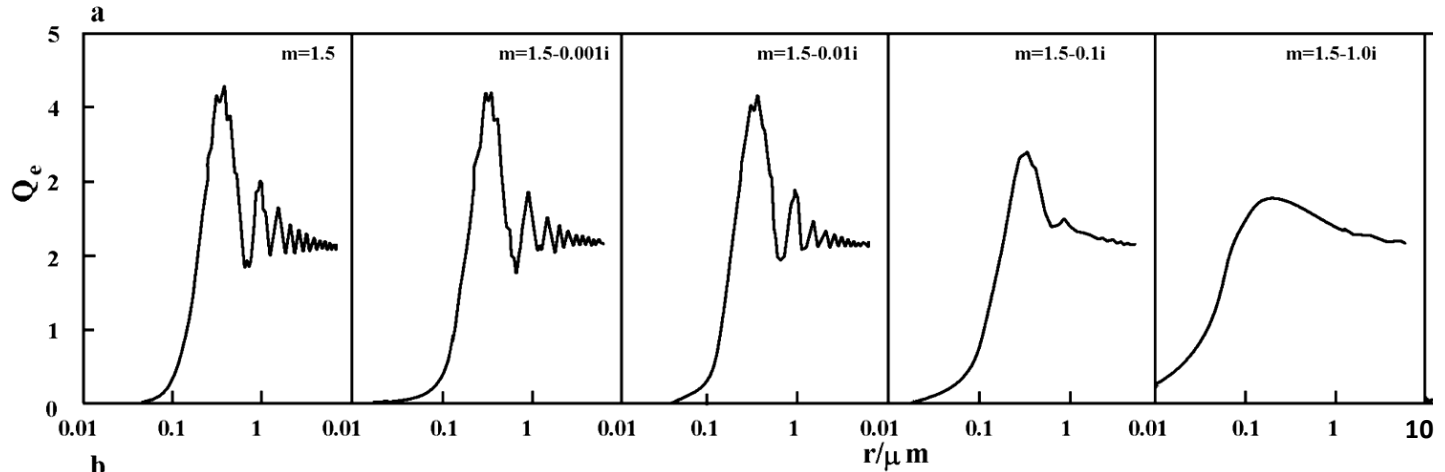
$$x = 2\pi r / \lambda$$

物质名称	分子式或符号	密度	温度	折射率
丙醇	CH3COCH3	0.791	20	1.3593
甲醇	CH3OH	0.794	20	1.3290
乙醇	C2H5OH	0.800	20	1.3618
苯	C6H6	1.880	20	1.5012
二硫化碳	CS2	1.263	20	1.6276
四氯化碳	CCl4	1.591	20	1.4607
三氯甲烷	CHCl3	1.489	20	1.4467
乙醚	C2H5-O-C2H5	0.715	20	1.3538
甘油	C3H8O3	1.260	20	1.4730
松节油		0.87	20.7	1.4721
橄榄油		0.92	0	1.4763
水	H2O	1.00	20	1.3330
熔凝石英	SiO2			1.45843
氯化钠	NaCl			1.54427
氯化钾	KCl			1.49044
萤石	CaF2			1.43381
冕牌玻璃	K6			1.51110
	K8			1.51590
	K9			1.51630
重冕玻璃	ZK6			1.61263
	ZK8			1.61400
钡冕玻璃	BaK2			1.53988
火石玻璃	F1			1.60328
钡火石玻璃	BaF8			1.62590
重火石玻璃	ZF1			1.64752
	ZF5			1.73977
	ZF6			1.75496

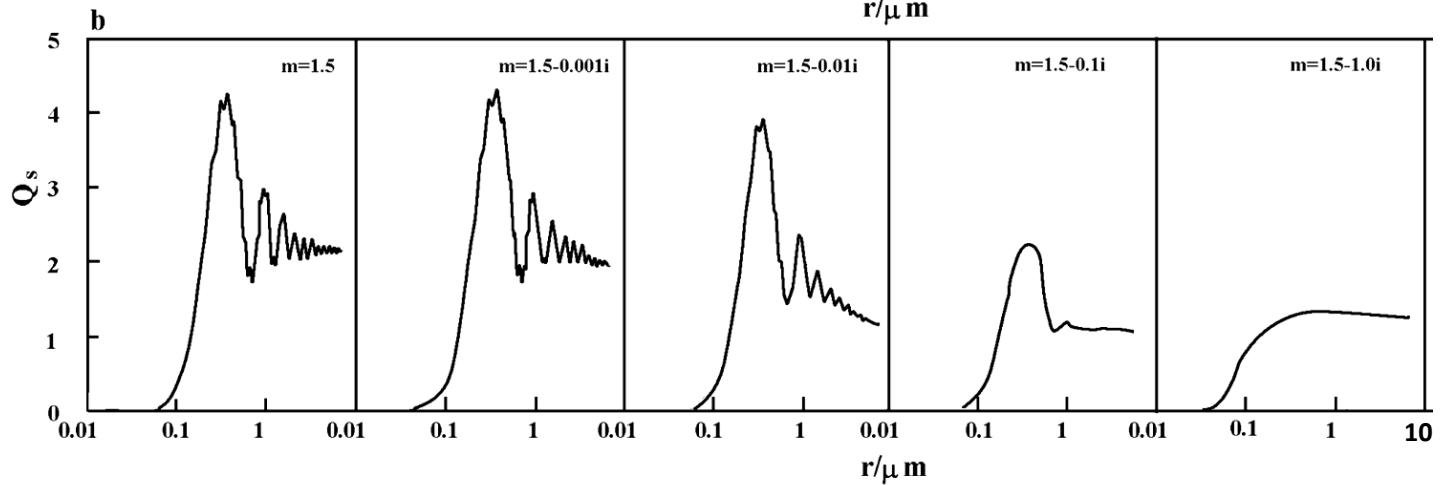
米散射的特性

$\lambda = 0.5 \mu\text{m}$

消光效率



散射效率

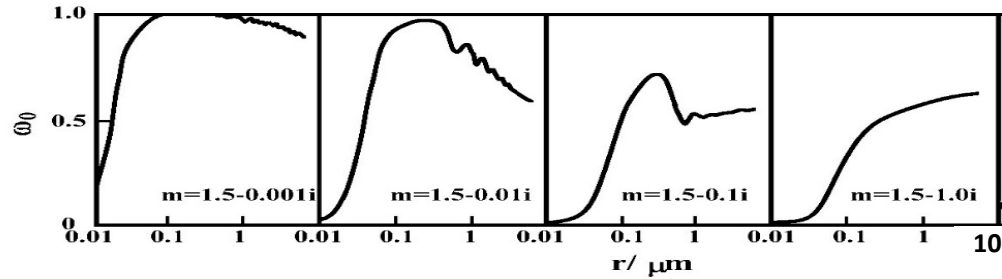


$$x = 2\pi r / \lambda$$

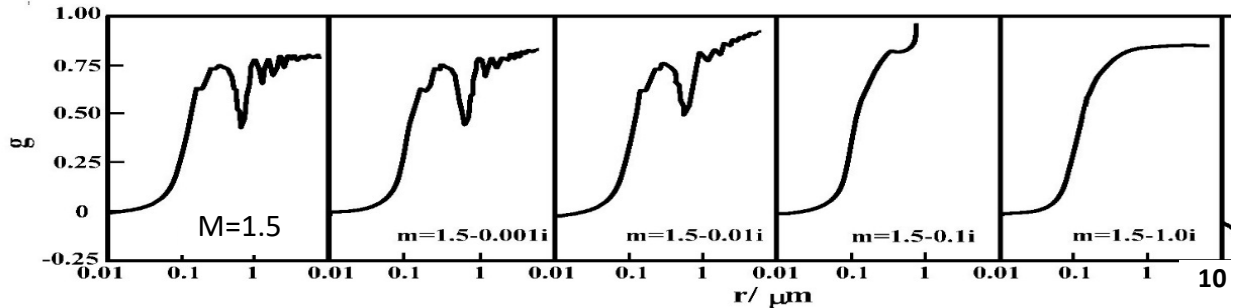
0.13 1.3 13 0.13 1.3 13 0.13 1.3 13 0.13 1.3 13 0.13 1.3 13

米散射的特性

$\lambda = 0.5 \mu\text{m}$



单次散射
反照率



不对称
度因子

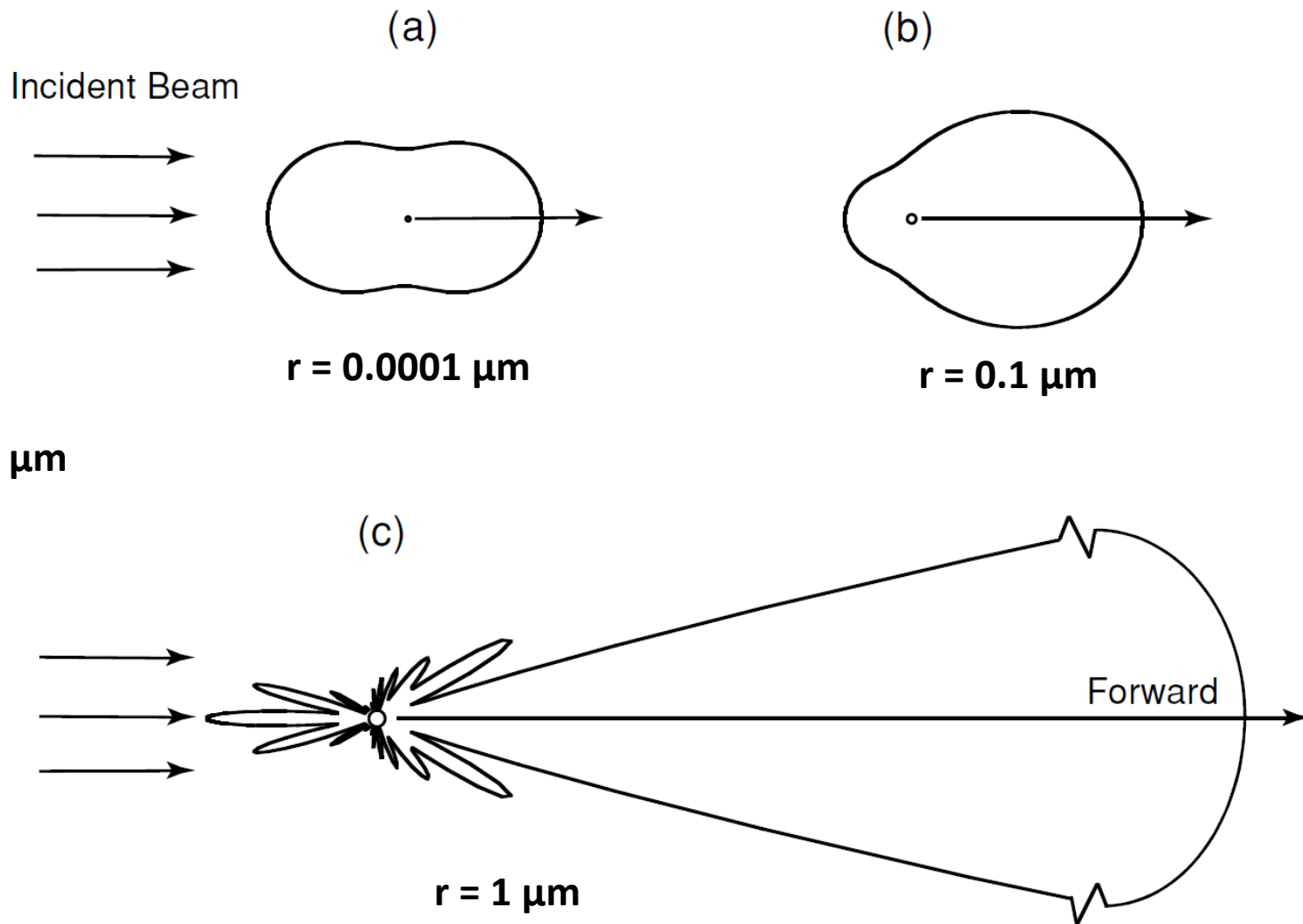
$$x = 2\pi r / \lambda$$

0.13 1.3 13 0.13 1.3 13 0.13 1.3 13 0.13 1.3 13 0.13 1.3 13

**Radiative
properties of
aerosols in
GEOS-Chem**

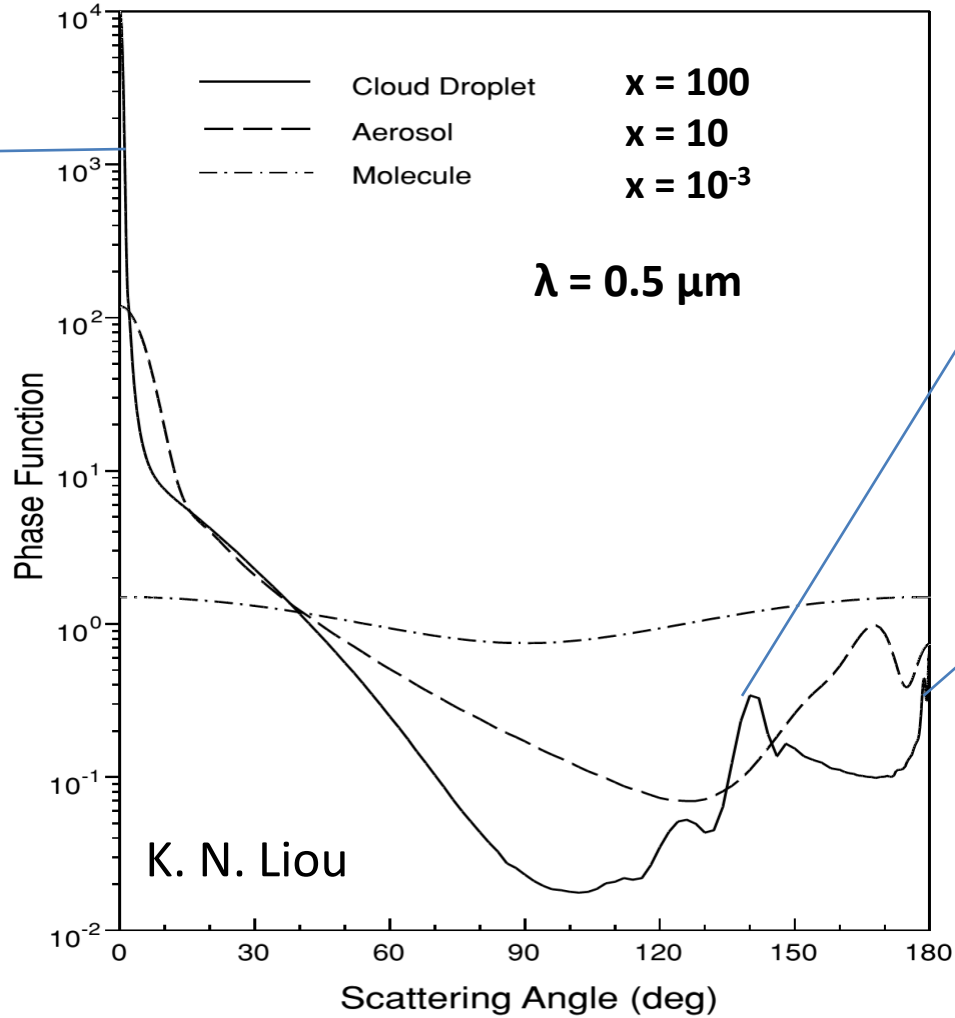
	Geometric radius (r_g) (μm)	Geometric SD (σ_g , log(μm))	Refractive index (550 nm)	Density (g cm^{-3})
Sulfate, Nitrate and Ammonium	0.070	1.6	1.53-0.006i	1.7
OA	0.064	1.6	1.53-0.006i	1.8
BC	0.020	1.6	1.95-0.79i	1.8
Sea salt				
Accumulation	0.085	1.5	1.50-0.00000001i	2.2
Coarse	0.40	1.8	1.50-0.00000001i	2.2
Dust	7 bins: 0.015, 0.25, 0.40, 0.80, 1.5, 2.5, 4.0	2.2	1.56-0.0014i	2.5

米散射的特性



Phase Function

Corona 日华



Rainbow 彩虹



Glory 光环



米散射理论结果总结

- 散射效率 Q_s 随尺度数 x 而变。当 x 很小时，和瑞利散射一样，与波长四次方成反比；当 x 增大时，与波长的关系复杂；最后当 x 相当大时，和波长无明显关系。
- 在吸收不强时，散射效率 Q_s 随 x 的增大呈振动状态变化，最后趋向于 2，即散射截面是几何截面的二倍。但当吸收增强时， Q_s 曲线上的振动消失了。
- 随着粒子尺度数 x 的增大，前向散射光在总散射光中的比值迅速增大。
- 散射角 ≈ 0 的前向散射光基本上不改变入射光的偏振状态，当入射光是自然光时，该散射光也是非偏振的。散射光偏振度最大的方向出现在散射角为 85° - 120° 之间。

思考题

- 问题一：说明不对称因子 g 的意义： $g > 0$, $g < 0$, $g = 0$ 。假设散射时向上和向下的散射光强分别是一样的（semi-isotropic），在这种情况下， g 可能达到的最大值是多少？ g 可能达到1么？ $g = 1$ 和 $g = -1$ 分别意味着什么？
- 问题二：‘蓝月亮’是指月亮呈现蓝色，是很罕见的现象。思考肉眼从地面向上看到‘蓝月亮’所需条件，以及为什么这种现象很少出现。



<https://zhuanlan.zhihu.com/p/33472940>

https://m.sohu.com/n/464038572/?_f=m-article_ch

散射光

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sigma(\theta)}{r^2} = I_0 \left(\frac{\sigma_{sc}}{r^2} \right) \frac{P(\theta)}{4\pi}$$

$$\frac{\sigma_{sc}}{\pi a^2} = Q_{sc} = c_1 x^4 (1 + c_2 x^2 + c_3 x^4 + \dots)$$

$$c_1 = \frac{8}{3} \left(\frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} \right)^2 \quad c_2 = \frac{6}{5} \left(\frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} \right)$$

$$c_3 = \frac{3}{175} \frac{m^6 + 41m^4 - 28m^2 + 284}{(m^2 + 2)^2} + \frac{1}{900} \left(\frac{m^2 + 2}{2m^2 + 2} \right)^2 [15 + (2m^2 + 3)^2]$$

➤当 $x \ll 1$, $mx \ll 1$ 时, 级数只取 x 的最低幂次项, 此时简化为瑞利散射

Liou K.N., An introduction to atmospheric radiation

散射光

$$Q_{sc} = \frac{2}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

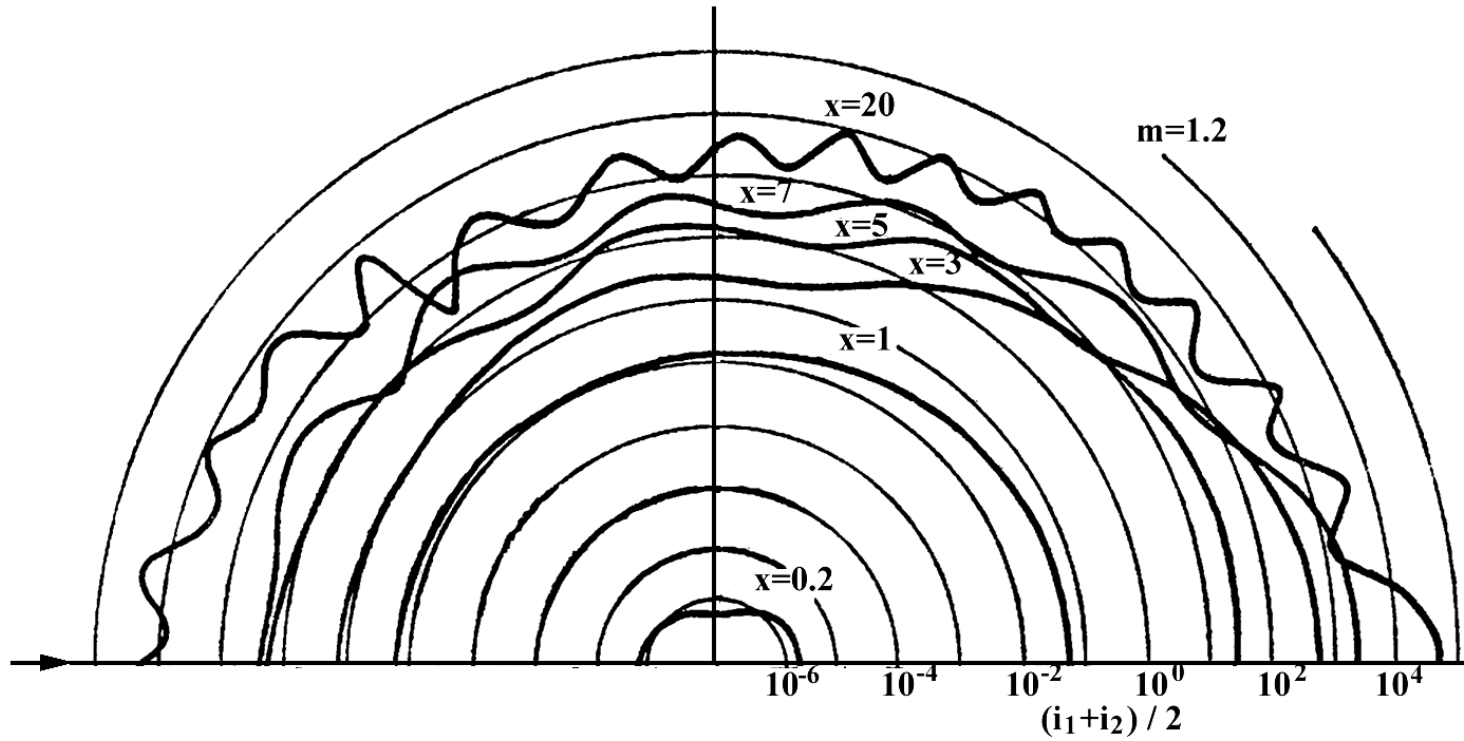
$$Q_{ex} = \frac{2}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \operatorname{Re}(a_n + b_n)$$

$$Q_{ab} = Q_{ex} - Q_{sc} \quad \omega_0 = Q_{sc}/Q_{ex}$$

$$g = \frac{4}{x^2 Q_{sc}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{n(n+2)}{(n+1)} \operatorname{Re}(a_n \cdot a_{n+1}^* + b_n \cdot b_{n+1}^*) + \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \operatorname{Re}(a_n \cdot b_n^*) \right\}$$

- **Re表示取实部，*表示共轭**
- **当 $x \ll 1$ ， $mx \ll 1$ 时，级数只取 x 的最低幂次项，米散射公式就简化为瑞利散射**

米散射的特性



散射函数随尺度数 x 的变化

瑞利散射、几何光学近似

Table 3.2 Some scattering regimes

Regime	Conditions	Q_s	ns	$P(\cos \Theta)$
Rayleigh	$x \ll 1$	$\frac{8}{3}x^4 \left \frac{\tilde{m}^2 - 1}{\tilde{m}^2 + 2} \right ^2$	$\propto x^3$	$\frac{3}{4}(1 + \cos^2 \Theta)$
Rayleigh-Gans	$x \gg 1, \rho \ll 1$	$2x^2 \tilde{m} - 1 $	$\propto x$	
Anomalous diffraction	$x \gg 1, \rho$ finite	2	$\propto x^{-1}$	

Rayleigh scattering is given in the form appropriate for a single particle; see

$\rho = 2x(m - 1)$ **Phase shift parameter**

$\rho \sin \alpha$ **Phase lag**

$ns =$ scattering coefficient per unit volume 体积散射系数

米散射计算软件

- **BHMIE.FOR**
 - Bohren and Huffman (1983)

Absorption and Scattering of Light by Small Particles, Craig F. Bohren, Donald R. Huffman